Midtoets Lineaire Algebra

vrijdag 28 mei 2010   9.00-11.00 uur

Tijdens deze toets mogen boek/diktaat/aantekeningen en een eenvoudige rekenmachine worden geraadpleegd. Het gebruik van een grafische rekenmachine is niet toegestaan.
Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Een antwoord zonder berekening zal dus niet worden goed gerekend. Succes !

Vermeld op elke bladzijde je naam en studentnummer.

Gratis: $\boxed{10}$

1. Gegeven zijn de matrix $\mathbf{A}$ en de vector $\vec{\mathbf{b}}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \alpha \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hierin zijn α en β nader te bepalen constantes.

(a) $\boxed{7}$ Neem $\alpha = -1$ en $\beta = 5$ en bepaal de oplossing van $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$.

(b) $\boxed{10}$ Bepaal voor welke α en β de vergelijking $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ geen enkele oplossing heeft.

2. Gegeven zijn de vectoren

$$\vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Hierin is α een nader te bepalen constante.

(a) $\boxed{5}$ Bepaal de vector in de richting van vector $\vec{\mathbf{a}}$, met lengte 3.

(b) $\boxed{5}$ Voor welke waarde(n) van α staan $\vec{\mathbf{b}}$ en $\vec{\mathbf{c}}$ loodrecht op elkaar?

(c) $\boxed{9}$ Voor welke α zijn $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ en $\vec{\mathbf{c}}$ lineair onafhankelijk?

3. Gegeven is de matrix $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) $\boxed{8}$ Bereken de matrix $\mathbf{A}^2$.

(b) $\boxed{9}$ Bereken de inverse van $\mathbf{A}$.

Z.O.Z.

4. Gegeven zijn de vectoren

$$\vec{\mathbf{v_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{v_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{v_3}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{\mathbf{w_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{w_2}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{w_3}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Van een lineaire afbeelding $\mathbf{T}$ is gegeven dat $\mathbf{T}(\mathbf{v_1}) = \mathbf{w_1}$, $\mathbf{T}(\mathbf{v_2}) = \mathbf{w_2}$ en $\mathbf{T}(\mathbf{v_3}) = \mathbf{w_3}$.

(a) $\boxed{7}$ Bepaal het beeld van de vector $\vec{\mathbf{e_3}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aanwijzing: maak hiervoor gebruik van de 'lineaire eigenschappen' van $\mathbf{T}$.

(b) $\boxed{5}$ Bepaal de matrix A zodat voor $\mathbf{T}$ geldt $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$.

(c) $\boxed{7}$ Is de afbeelding $\mathbf{T}$ een injectieve (Engels: one-to-one) afbeelding?
Aanwijzing: bestudeer de orginelen van de nulvector.

5. Een autoverhuurbedrijf heeft 3 vestigingen: in Groningen, Amsterdam en Maastricht. Auto's worden 's ochtends gehuurd en 's avonds weer teruggebracht. Een gehuurde auto mag bij elk van de 3 vestigingen worden teruggebracht. De fracties van dagelijks teruggebrachte auto's worden gegeven door

gehuurd van

G	A	M	
0.9	0.2	0.1	G
0.0	0.7	0.1	A
0.1	0.1	0.8	M

ingeleverd bij

Bijvoorbeeld: 20% van de auto's die 's ochtends worden gehuurd in Amsterdam worden 's avonds in Groningen ingeleverd. Op zondagochtend zijn er 300 auto's in Groningen, 200 in Amsterdam en 400 in Maastricht.

(a) $\boxed{4}$ Bepaal het aantal auto's bij elke vestiging na 1 dag, dus op zondagavond.

(b) $\boxed{4}$ Bepaal het aantal auto's bij elke vestiging op maandagavond.

(c) $\boxed{10}$ Na een lange periode heeft elke vestiging 's morgens en 's avonds evenveel auto's voor de deur staan. Het aantal auto's bij elke vestiging zal dan nog wel verschillend zijn. Bepaal het aantal auto's na lange tijd voor de vestiging Groningen.

Aanwijzing: als de 'stationaire eindtoestand' voor de drie vestigingen wordt gegeven door

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} g \\ a \\ m \end{pmatrix}$$

Wat moet dan gelden voor het matrix-vector product $\mathbf{Ax}$?

Totaal: $\boxed{100}$